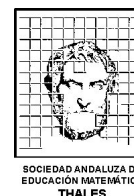




XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE  
LAS MATEMÁTICAS: EL SENTIDO DE LAS MATEMÁTICAS.  
MATEMÁTICAS CON SENTIDO



## UNA EXPERIENCIA SOBRE EL TRATAMIENTO DE LAS FRACCIONES EN LA ESCUELA PRIMARIA EN CUBA.

**Celia Rizo Cabrera**, *Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo (Guerrero)*, [luis.campistrous@yahoo.com.mx](mailto:luis.campistrous@yahoo.com.mx)

**Luis Augusto Campistrous Pérez**, *Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, (Guerrero)* [celrizo@yahoo.com.mx](mailto:celrizo@yahoo.com.mx)

### RESUMEN.

En el trabajo se presenta una experiencia sobre el tratamiento de las fracciones que se hace en la escuela primaria cubana. El **concepto de fracción** se introduce en el quinto grado (10, 11 o 12 años), en el que se trabaja de forma inicial a partir de considerar al mismo como la representación numérica de las partes que se han tomado de una **unidad que ha sido previamente dividida en partes iguales**. Se introduce en este mismo grado la notación decimal para representar el dinero, que es ya conocido por el uso del dinero en Cuba (pesos y centavos) lo cual es utilizado en sexto como notación (decimal) para representar a los elementos del conjunto de las fracciones equivalentes a una dada. En ese grado, a este nuevo conjunto se denomina **número fraccionario**.

**Nivel educativo:** Primaria

### 1. INTRODUCCIÓN.

En el trabajo se expone la vía escogida para el tratamiento de las fracciones a partir del quinto grado (11 o 12 años) en la escuela primaria cubana. Se destaca la introducción de la relación que hay entre las fracciones que se obtienen una de otra por ampliación o simplificación (sus productos cruzados son iguales), que en Cuba se denominan **fracciones equivalentes** y lo que ellas significan para la práctica: representan la misma parte de una unidad que ha sido dividida en partes iguales. Se aprovecha esta relación para introducir el término **número fraccionario** para llamar al conjunto de fracciones equivalentes a una dada y se muestra un ejemplo de cómo se puede concebir la enseñanza de la matemática desde la escuela primaria sin perder el carácter científico de la misma, y en consecuencia el impacto que ello debe provocar en el aprendizaje de los alumnos. El tratamiento de este concepto se inicia desde el quinto grado donde ya se consideran algunos significados del concepto "fracción" y desde el cuarto grado ya se introduce la notación decimal asociada al cálculo.

### 2. EL CONCEPTO

En sexto grado, a partir del concepto "**fracciones equivalentes**", para **aquellas fracciones que representan la misma parte de un todo** que usualmente se trabaja en la escuela aunque en ocasiones de manera encubierta,

se llegará al concepto "**número fraccionario**" que se utiliza para designar al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada.

Es necesario comenzar por plantear que considerar las fracciones como partes iguales de una unidad es la consideración más común en el tratamiento de este concepto en la escuela elemental, no obstante, la misma por sí sola deja fuera otros aspectos importantes de su uso, tanto en la práctica como en la ciencia. Ejemplo de ello es el propio cálculo con fracciones, en el caso de la suma y la resta cuando las fracciones que intervienen no tienen el mismo denominador.

Resolver estas limitaciones, es esencial para poder llegar a un concepto más amplio, que incluya al anterior pero que resuelva las insuficiencias o limitaciones que tiene el mismo.

Para lograrlo se hace que los alumnos comprendan que cuando dos fracciones representan la misma parte de un todo (significado práctico de la equivalencia de dos fracciones) satisfacen también la relación numérica de tener sus productos cruzados iguales.

La anterior relación es una **relación de equivalencia** ya que es **reflexiva, simétrica y transitiva**. En ese caso, los **números fraccionarios** serían las **clases de equivalencia** que surgen a partir de **la partición que se produce en el primitivo conjunto de fracciones, por la relación introducida en el mismo**, aunque el lenguaje se adapta a las características de las edades de los alumnos y de la escuela cubana.

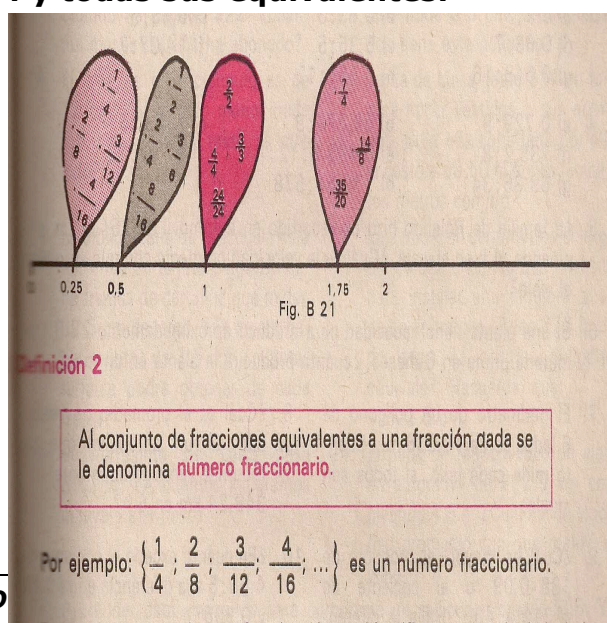
En la escuela se trabaja formando las clases, cada **clase no es más que el conjunto de una fracción y todas sus equivalentes**. Por ejemplo: la clase de la fracción  $\frac{3}{29}$  (o cualquiera de sus equivalentes) es  $\{\frac{3}{29}; \frac{6}{58}; \frac{9}{87}; \dots; \frac{3x}{29x} \dots\}$ , con  $x$  perteneciente a  $\mathbb{N}$ .

De igual modo, el conjunto  $\{\frac{5}{3}; \frac{10}{6}; \frac{15}{9}; \frac{18}{12}; \dots; \frac{5x}{3x} \dots\}$  con  $x$  perteneciente a  $\mathbb{N}$ , es la clase correspondiente al  $\frac{5}{3}$ , o de cualquiera de sus equivalentes.

A cada uno de estos conjuntos (clases de equivalencia) se le va a denominar **número fraccionario**, por ejemplo, **el número fraccionario  $\frac{1}{4}$  es el conjunto formado por la fracción  $\frac{1}{4}$  y todas sus equivalentes**.

La implementación didáctica de este concepto se ilustra en la gráfica de al lado, en la que aparece una página del libro de Sexto grado donde está representado un rayo numérico y **algunos puntos** que corresponden a **números fraccionarios** incluidos el **1** y el **2** y otros dados en **notación decimal** (0,25; 0,5; 1,75) que **es la más conveniente para designar a las clases de equivalencia**.

En este caso hay que tener en cuenta que **cualquiera de las fracciones que pertenecen a la clase del número fraccionario, en**



**este caso el número fraccionario  $1/4$ , lo puede representar.**

Se hace observar que **el número fraccionario  $1/4$  es igual al número fraccionario  $2/8$  y al  $3/12$  y al  $200/800$ , entre los infinitos que pueden ser utilizados para nombrar a la clase. El número decimal correspondiente a esa clase es el  $0,25$ !!!<sup>1</sup>**

De este modo se logra que los alumnos identifiquen las clases con un objeto, bien sea un punto del rayo numérico o una expresión decimal, a este objeto se le da el nombre de número fraccionario. El conjunto de estos objetos es el conjunto de los números fraccionarios y se denota por  $Q^+$ .

Por ejemplo,  $\{5/3; 10/6; 15/9; 18/12; \dots 5x/3x; \dots\}$ , con  $x$  perteneciente a  $N$ , excepto el 0, **es un número fraccionario** que se representa por cualquiera de las fracciones que pertenecen a él y a cada fracción que pertenece al conjunto sólo se le dice **cinco tercios** o también **fracción cinco tercios**.

Para concluir se introduce la **notación decimal para representar a las clases**. Por ejemplo, la clase del  $0,5$  es el conjunto que se ilustra a continuación:

$$0,5 = \{1/2; 2/4; 3/6; 4/8; \dots n/2n; \dots\}$$

Se hace observar que cada **número decimal** representa a la clase completa respectiva. Por ejemplo:

$$1,5 = \{3/2; 6/4; 9/6; 12/8; \dots 3n/2n; \dots\}$$

$$2,4 = \{12/5; 24/10; 36/15; 48/20; \dots 12n/5n; \dots\}$$

En síntesis, **el conjunto de los números decimales** se hace corresponder con el conjunto cociente que se obtiene de definir en el conjunto de las fracciones la relación de equivalencia denominada **"tener los productos cruzados iguales"** aunque esta consideración desde el punto de vista de la matemática no se hace de forma explícita en la escuela.

La construcción antes realizada, es una muestra de las posibilidades que hay de hacer en edades tempranas una construcción científica de conceptos esenciales, como es el caso del de número fraccionario, y que las vías utilizadas pueden convertirse en modelos para **la construcción de otros conceptos que, por su naturaleza, puedan hacerse mediante clases de equivalencia como resultó en este caso**.

Por otra parte, la anterior construcción permite también justificar los procedimientos de cálculo que se usan, como es en el caso de la suma y resta de fracciones en el caso de que no tengan un mismo denominador. Observen que para ello basta **reducirlas a un mismo denominador** que significa que **se pasa de las fracciones dadas originalmente a otras que están en su misma clase pero que, a la vez, tienen el mismo denominador de las otras que intervienen en la suma (o en la resta), y que pueden no estar en la misma clase de las primeras**.

Un ejemplo de cómo operar con las clases es el siguiente:

<sup>1</sup> Como se sabe, es lo mismo si el número decimal es el  $0,250$  u otro cualquiera que se obtenga agregando ceros (0) al final ( $0,2500$ ;  $0,25000$ ; ...) y, en este caso, siempre que las dos primeras cifras se mantengan iguales y las restantes sean ceros.

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{5}{20} + \frac{12}{20} = \frac{17}{20}$$
$$(\frac{1}{4}=\frac{5}{20} \text{ y } \frac{3}{5}=\frac{12}{20})$$

La **igualdad anterior** solo se justifica porque **no se está trabajando con las fracciones sino con los números fraccionarios que son clases de fracciones equivalentes**, en este caso **con las clases de fracciones equivalentes a  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{3}{5}$  respectivamente!!!** En otras palabras **se está calculando con las clases de equivalencia!!!** y eso significa que se está trabajando **en el conjunto de los números fraccionarios**.

Lo antes planteado es lo que siempre se ha hecho, la novedad puede estar en que **no siempre se hace una fundamentación matemática completa que esté al alcance de los alumnos**.

A nuestro juicio, y teniendo en cuenta nuestra experiencia en el trabajo con maestros, siempre se puede hacer una implementación didáctica adecuada al nivel de los alumnos si los docentes están preparados para ello.

Las consideraciones sobre los diferentes significados del concepto fracción y su tratamiento en la escuela, en especial el denominado **significado práctico** de la fracción como **partes iguales de un todo que ha sido dividido en partes iguales**, debe ser objeto de atención didáctica para que se logre una apropiación adecuada de las características esenciales del concepto, en su interpretación matemática propiamente dicha, así como sus limitaciones en cuanto a su uso en la práctica, que están muy relacionadas con esas características esenciales.

No obstante, vale la pena preguntarse cuáles son las principales limitaciones que tiene el uso de las fracciones en la práctica. A esa pregunta se le pueden dar unas cuantas respuestas diferentes según sea la mirada que se quiera dar a la misma. No obstante, todos sabemos que para usar las fracciones en la práctica los objetos que participan deben ser de tal naturaleza que permitan dividirlos en partes iguales, según una determinada característica que sea considerada. Puede suceder que sea un **itodo!** que satisfaga la característica anterior, o que sea un conjunto de objetos genéricos, o sea pertenecientes a una misma clase de objetos por su naturaleza o por su uso, los hace tener las mismas características relativas a su forma o a su funcionalidad y ello permite que un conjunto adecuado de ellos sea dividido en partes iguales.

Esta noción de todo o de conjunto que sea posible dividirlo en partes iguales, es parte esencial del concepto fracción. No obstante hay conjuntos que son numerables, es decir que se pueden medir por su cantidad en magnitudes discretas, como por ejemplo la población de un país, la cantidad de analfabetos de una población con respecto al total, las partes que se han consumido de un pastel que ha sido dividido en partes iguales, o las que no se han consumido. Hay otros objetos o materiales que no son fácilmente divisibles en partes iguales, como por ejemplo el aire que se acumula en una cierta parte de una región dada, entre otros casos. En los ejemplos antes dados se puede utilizar la noción de parte de un conjunto según un criterio de partición que se establezca en un momento dado, siempre que las partes obtenidas sean iguales según la consideración de igualdad que se haga en cada caso.

### 3. CONCLUSIONES

En realidad en el tratamiento de las fracciones se presentan dos conceptos fundamentales:

- La **fracción como un simple par de números naturales que expresan partes de una unidad que ha sido dividida en partes iguales** y a la cual se le atribuyen diferentes significados.
- El **conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada** que no es más que la **clase de fracciones "equivalentes a una dada"** que ya solo no representa una división de un todo en partes iguales, sino todas aquellas que pueden representar esa misma situación.

En el caso de la escuela cubana, el tratamiento este nuevo dominio numérico al que se denomina **conjunto de los números fraccionarios**, para diferenciarlo del de las fracciones, se inicia formalmente en el quinto grado de la escuela primaria. El mismo se continúa en sexto grado y en séptimo se sistematiza lo de sexto grado y se concluye lo relativo a la introducción del concepto. Se caracteriza por el intento de hacer una implementación didáctica, acorde a las edades (12 años en adelante) sin perder el carácter científico de la enseñanza que es un principio de la escuela cubana.

La vía utilizada para la elaboración de este concepto es partir de problemas de la práctica que ilustren la necesidad de tener otros números, además de los naturales y para ello se sigue una vía didáctica con una fundamentación matemática muy clara:

- ✓ Se **introducen las fracciones como partes de un todo**, significado que está muy relacionado con la necesidad práctica de dividir en partes iguales cantidades enteras (lo que se le denomina el todo).
- ✓ Aparece la situación de que **hay fracciones diferentes que representan la misma parte de un todo**. Eso es un inconveniente para el significado del concepto y para su uso porque, aunque nos posibilita operar con fracciones que no sean de igual denominador, también constituye un problema muy importante para la práctica. Precizando la idea anterior se tiene que si uno quiere dividir algo en partes iguales no siempre lo puede hacer directamente: es más fácil dividir a la mitad un pastel, después en la mitad de las mitades (en cuartos) y así sucesivamente, hasta llegar a la cantidad de partes iguales que aproximadamente satisfaga el número de posibles comensales. Al final se tendrán en  $n$  veces,  $1/n$  partes iguales.
- ✓ Se introduce el **concepto de fracciones equivalentes** para aquellas que se obtienen unas de otras por ampliación o simplificación y se precisa que **dos fracciones son equivalentes si y solo si sus productos cruzados son iguales**.

Se destaca el hecho de que **las fracciones equivalentes representan la misma parte de un todo** y se introduce la **notación decimal para representar las clases de equivalencia**.

- ✓ Se denomina «**número fraccionario**» al conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Matemáticamente hablando, este paso significa introducir en el conjunto de las fracciones la relación de «ser equivalentes»



para el caso en que sus productos cruzados sean iguales. Se tiene así el concepto de «números fraccionarios» que es asignado al conjunto de las «clases de equivalencia» de las fracciones que son equivalentes entre sí (sus productos cruzados son iguales).

- ✓ Se introduce la **notación decimal** que es la que se corresponde exactamente con el concepto introducido, para el caso de fracciones de denominadores expresados como potencias de 10.

Con respecto a lo antes planteado, es bien conocido el hecho de que en la escuela elemental lo normal es introducir la adición de fracciones mediante la

“regla de los productos cruzados”:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab+cd}{bd}$  pero no siempre se explica

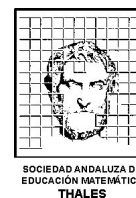
por qué debe hacerse así y por tanto se convierte en una regla que alumnos y maestros repiten sin una fundamentación adecuada y que, por tanto, se olvida con facilidad al punto que algún tiempo después los alumnos la han olvidado y ya no pueden calcular. Este hecho impacta la práctica escolar. No obstante una explicación simple es que para sumar o restar fracciones es conveniente expresarlas primero con un denominador común. Eso significa que **no se está operando con las fracciones propiamente dichas sino con los números fraccionarios respectivos**. En otras palabras, lo anterior sólo es posible porque **en la práctica se está operando con números fraccionarios** y para el caso de la suma y la resta se escogen representantes de los mismos que tengan el mismo denominador.

Como se puede inferir del párrafo anterior, la utilización del concepto número fraccionario como clase de equivalencia permite explicar el proceso de adición (y sustracción) y fundamentar su definición sin necesidad de recurrir a reglas que es preciso memorizar, para ello basta escoger en cada número fraccionario (en cada clase) dos fracciones que tengan el mismo denominador y sumar (o restar) en la forma natural que se infiere a partir del significado como parte todo, que es el que se prioriza en la presentación que se hace en la escuela cubana.

Obviamente esta forma de introducir, desde edades tempranas, conceptos matemáticos que se sustentan en relaciones de equivalencia que están por detrás de muchos otros conceptos tales como la igualdad, el paralelismo, la semejanza, contribuye a la formación matemática de los alumnos y le da un carácter verdaderamente científico al proceso educativo. Cabe destacar que en muchas concepciones de lo que se hace en la escuela se refieren a este carácter científico, pero que no siempre se puede estructurar para hacer una implementación didáctica y comprensible para los alumnos.



## XV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EL SENTIDO DE LAS MATEMÁTICAS. MATEMÁTICAS CON SENTIDO



Para finalizar es imprescindible destacar que la escuela cubana de educación general, de primero a decimosegundo grado, tiene un plan de estudios único y los libros son igualmente únicos y han sido elaborados, a partir de ese plan, por equipos de investigadores y maestros destacados que fueron seleccionados para ese trabajo. Esta forma de implementación facilita la atención especializada que requiere la introducción de nuevos planes y programas, en el caso de Cuba en la que la educación es totalmente masiva y está estructurada de igual forma en todo el país.

### REFERENCIAS.

- Campistrous, L. (1973) Números fraccionarios, folleto para maestros. Editorial del Ministerio de Educación de la República de Cuba.
- Campistrous, Luis A. y otros. *Matemática 7*. (1988). Editorial Pueblo y Educación. Ministerio de Educación de la República de Cuba.
- Campistrous, L. y Rizo, C. (2011) Algunas implicaciones de la filosofía marxista para la enseñanza de la matemática: el caso de Cuba. *Revista Iberoamericana de Educación*. N.º 56, pp. 179-199 (1022-6508)
- D'Amores, Bruno; Martha Isabel Fandiño (2011) *Elementos de Didáctica de la Matemática*. Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica. Dipartimento di Matematica – Università di Bologna. [www.dm.unibo.it/rsddm](http://www.dm.unibo.it/rsddm)
- Fandiño, I. (2009) *Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio Bogotá, Colombia.
- Flores R. (2011) *Los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria*. ALME 24 2011.
- Rizo, C. y otros. (1991). *Matemática 5*. Editorial Pueblo y Educación. Ministerio de Educación de la República de Cuba.
- Rizo, C. y otros. (1992). *Matemática 6*. Editorial Pueblo y Educación. Ministerio de Educación de la República de Cuba.